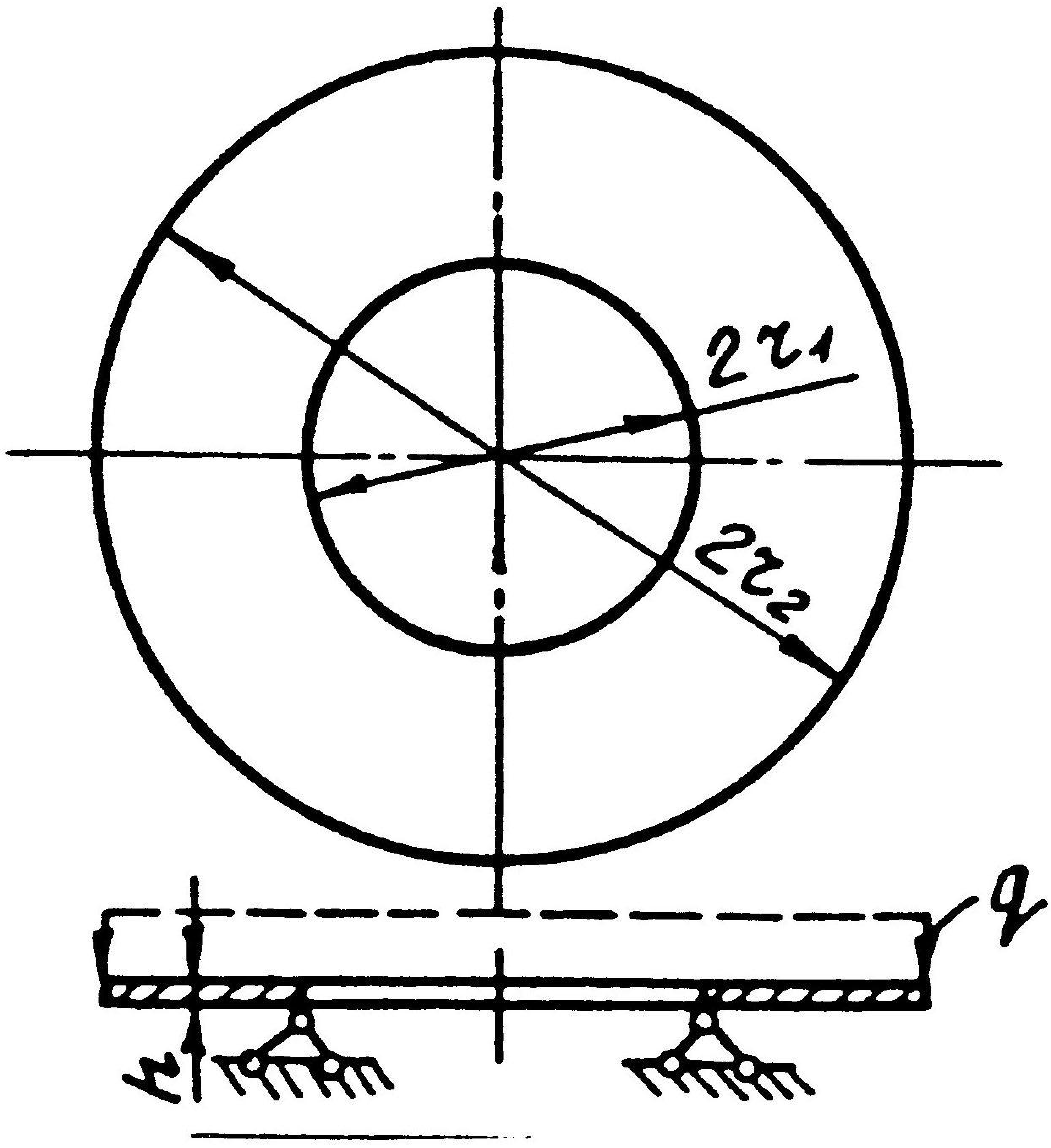
3.



Исходные данные

Внутренний радиус: $r_1 := 17 \cdot см$

Наружный радиус: $r_2 := 21 \cdot см$

Модуль упругости: $E := 200 \cdot ГПа$

Допускаемые напряжения: $\sigma_{доп} := 240 \cdot МПа$

Толщина пластины: $h := \dfrac{r_1}{50}$ $\quad h = 3.4\,мм$

Коэффициент Пуассона: $\mu := 0.3$

Решение

Цилиндрическая жёсткость пластины: $D := \dfrac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1 - \mu^2)}$ $\quad D = 719.9\,Н \cdot м$

Уравнение для нормального прогиба в общем виде:

$$w(r) := C_1 + C_2 \cdot (r)^2 + C_3 \cdot \ln(r) + C_4 \cdot (r)^2 \cdot \ln(r)$$

Изгибающие моменты в радиальном направлении: $M_r = D \cdot \left(\dfrac{d^2}{dr^2} w(r) + \dfrac{\mu}{r} \cdot \dfrac{d}{dr} w(r) \right)$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} w(r) + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{d}{dr} w(r) \right) \rightarrow 2 \cdot C_2 - \frac{C_3}{r^2} + 2 \cdot C_4 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C_4 + \frac{.3}{r} \cdot \left(2 \cdot C_2 \cdot r + \frac{C_3}{r} + 2 \cdot C_4 \cdot r \cdot \ln(r) + C_4 \cdot r \right)$$

Изгибающие моменты в окружном направлении: $M_\theta = D \cdot \left(\dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d}{dr} w(r) + \mu \cdot \dfrac{d^2}{dr^2} w(r) \right)$

$$\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} w(r) + \mu \cdot \frac{d^2}{dr^2} w(r) \right) \rightarrow \frac{1}{r} \cdot \left(2 \cdot C_2 \cdot r + \frac{C_3}{r} + 2 \cdot C_4 \cdot r \cdot \ln(r) + C_4 \cdot r \right) + .6 \cdot C_2 - .3 \cdot \frac{C_3}{r^2} + .6 \cdot C_4 \cdot \ln(r) + .9 \cdot C_4$$

Поперечная сила: $Q_r = D \cdot \dfrac{d}{dr}(\Delta w) = D \cdot \left(\dfrac{d^3}{dr^3} w(r) + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d^2}{dr^2} w(r) - \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{d}{dr} w(r) \right)$

$$2 \cdot \frac{C_3}{r^3} + 2 \cdot \frac{C_4}{r} + \frac{1}{r} \cdot \left(2 \cdot C_2 - \frac{C_3}{r^2} + 2 \cdot C_4 \cdot \ln(r) + 3 \cdot C_4 \right) - \frac{1}{r^2} \cdot \left(2 \cdot C_2 \cdot r + \frac{C_3}{r} + 2 \cdot C_4 \cdot r \cdot \ln(r) + C_4 \cdot r \right)$$

Краевые условия:

при $r = r_1$ $\quad w = 0$ $\qquad$ при $r = r_2$ $\quad Q = -q$

$M_r = 0$ $\qquad M_r = 0$

Составляю систему уравнений:

Given

$$C_1 + C_2 \cdot (r_1)^2 + C_3 \cdot \ln(r_1) + C_4 \cdot (r_1)^2 \cdot \ln(r_1) = 0$$

$$D \cdot \left[2 \cdot C_2 - \frac{C_3}{r_1^2} + 2 \cdot C_4 \cdot \ln(r_1) + 3 \cdot C_4 + \frac{0.3}{r_1} \cdot \left(2 \cdot C_2 \cdot r_1 + \frac{C_3}{r_1} + 2 \cdot C_4 \cdot r_1 \cdot \ln(r_1) + C_4 \cdot r_1 \right) \right] = 0$$

$$D \cdot \left[2 \cdot \frac{C_3}{r_2^3} + 2 \cdot \frac{C_4}{r_2} + \frac{1}{r_2} \cdot \left(2 \cdot C_2 - \frac{C_3}{r_2^2} + 2 \cdot C_4 \cdot \ln(r_2) + 3 \cdot C_4 \right) - \frac{1}{r_2^2} \cdot \left(2 \cdot C_2 \cdot r_2 + \frac{C_3}{r_2} + 2 \cdot C_4 \cdot r_2 \cdot \ln(r_2) + C_4 \cdot r_2 \right) \right] = -q$$

$$D \cdot \left[2 \cdot C_2 - \frac{C_3}{r_2^2} + 2 \cdot C_4 \cdot \ln(r_2) + 3 \cdot C_4 + \frac{.3}{r_2} \cdot \left(2 \cdot C_2 \cdot r_2 + \frac{C_3}{r_2} + 2 \cdot C_4 \cdot r_2 \cdot \ln(r_2) + C_4 \cdot r_2 \right) \right] = 0$$

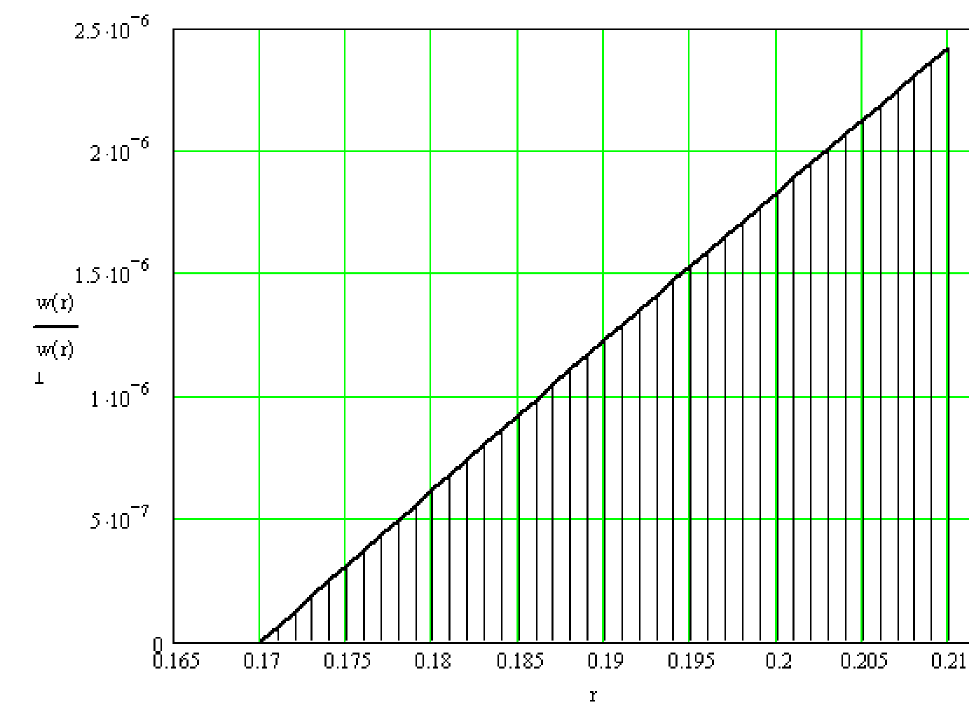
$$\mathrm{Find}(C_1, C_2, C_3, C_4) \rightarrow \begin{pmatrix} 4.5372449652223486713 \cdot 10^{-6} \cdot q \\ 8.0478760299451287344 \cdot 10^{-6} \cdot q \\ 4.7995644070134454203 \cdot 10^{-6} \cdot q \\ -7.2931556859525486447 \cdot 10^{-5} \cdot q \end{pmatrix}$$

Решая систему, получили: $C_1 := 4.5372449652223486713 \cdot 10^{-6}$ $\quad C_2 := 8.0478760299451287344 \cdot 10^{-6}$

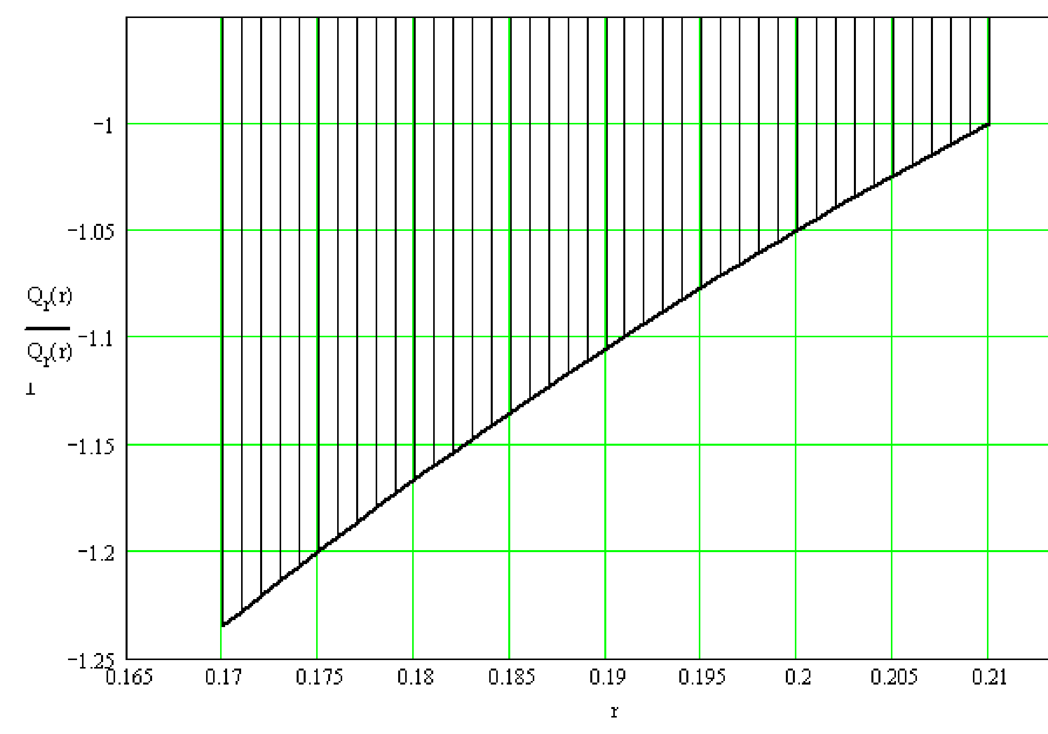
$C_3 := 4.7995644070134454203 \cdot 10^{-6}$ $\quad C_4 := -7.2931556859525486447 \cdot 10^{-5}$

Нормальный прогиб:

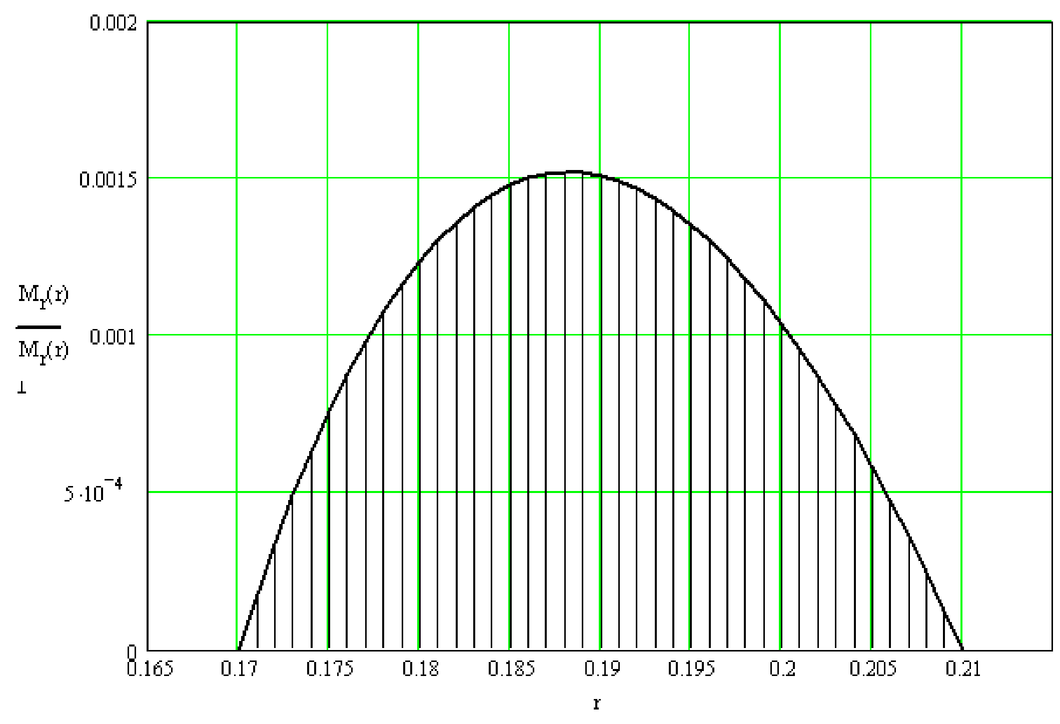
$w(r) := C_1 + C_2 \cdot (r)^2 + C_3 \cdot \ln(r) + C_4 \cdot (r)^2 \cdot \ln(r)$ $\quad w(r_1) = 0$ $\quad w(r_2) = 2.421 \times 10^{-6}$



Поперечная сила: $Q_r(r) := D \cdot \left(\dfrac{d^3}{dr^3} w(r) + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d^2}{dr^2} w(r) - \dfrac{1}{r^2} \cdot \dfrac{d}{dr} w(r) \right)$ $\quad Q_r(r_1) = -1.235$ $\quad Q_r(r_2) = -1$

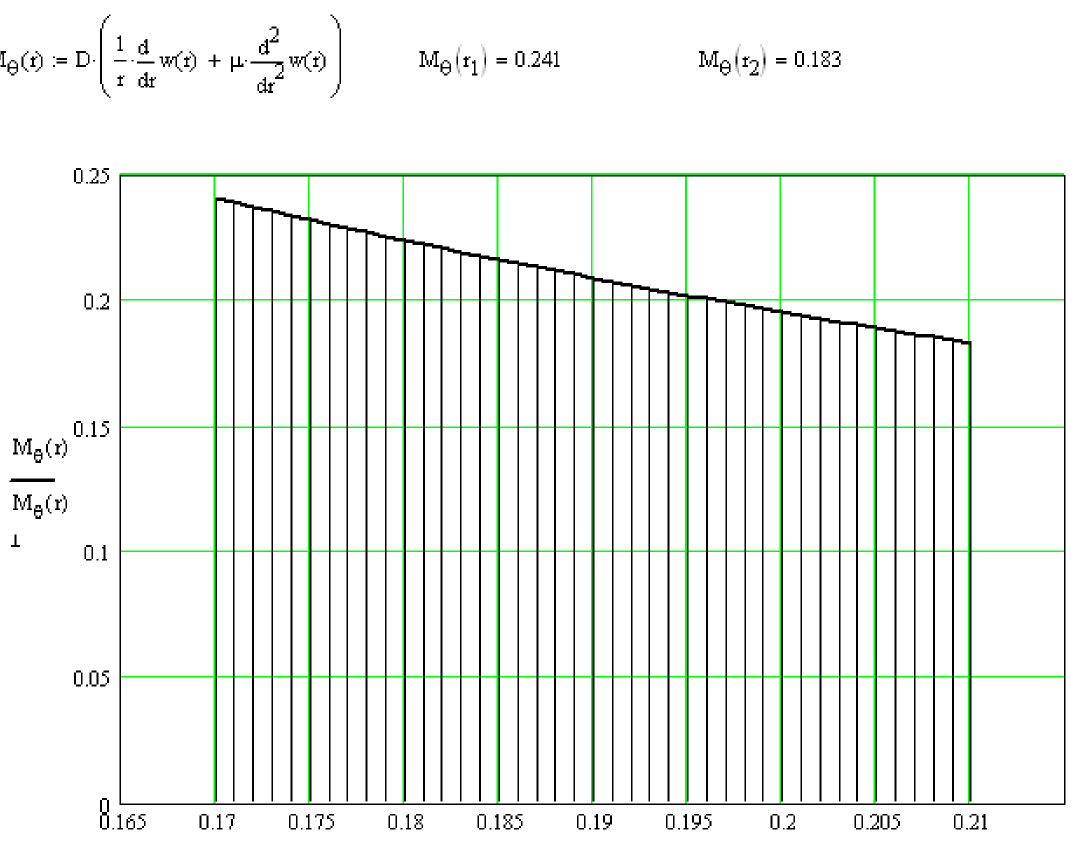


Радиальный изгибающий момент: $M_r(r) := D \cdot \left(\dfrac{d^2}{dr^2} w(r) + \dfrac{\mu}{r} \cdot \dfrac{d}{dr} w(r) \right)$ $\quad M_r(r_1) = -0$ $\quad M_r(r_2) = 0$



Изгибающий момент в окружном направлении:

$M_\theta(r) := D \cdot \left(\dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{d}{dr} w(r) + \mu \cdot \dfrac{d^2}{dr^2} w(r) \right)$ $\quad M_\theta(r_1) = 0.241$ $\quad M_\theta(r_2) = 0.183$



Из эпюр видно, что опасное сечение расположено на внутреннем радиусе пластины.

Максимальные напряжения возникают при $z = \dfrac{h}{2}$ и $z = \dfrac{-h}{2}$

$\sigma_{r\_н}(r) := \dfrac{6 \cdot M_r(r)}{h^2}$ $\quad \sigma_{r\_в}(r) := \dfrac{-6 \cdot M_r(r)}{h^2}$ $\quad \sigma_{r\_н}(r_1) = -0$ $\quad \sigma_{r\_в}(r_1) = 0$

$\sigma_{\theta\_н}(r) := \dfrac{6 \cdot M_\theta(r)}{h^2}$ $\quad \sigma_{\theta\_в}(r) := \dfrac{-6 \cdot M_\theta(r)}{h^2}$ $\quad \sigma_{\theta\_н}(r_1) = 125018.7$ $\quad \sigma_{\theta\_в}(r_1) = -125018.7$

Эквивалентные напряжения по критерию Сен-Венана:

$\sigma_{экв\_max1} := \sigma_{r\_н}(r_1) - \sigma_{\theta\_н}(r_1)$ $\quad \sigma_{экв\_max1} = -1.2502 \times 10^5$

$\sigma_{экв\_max2} := \sigma_{\theta\_н}(r_1) - \sigma_{r\_н}(r_1)$ $\quad \sigma_{экв\_max2} = 1.2502 \times 10^5$

Максимально допустимое значение нагрузки:

$q = \dfrac{\sigma_{доп}}{\sigma_{экв\_max2}}$ $\quad q := \dfrac{2.4 \times 10^8}{1.2502 \times 10^5}$ $\quad q = 1.92 \times 10^3 \ \dfrac{Н}{м}$